Theorie Woche 10:

∘ Das Eigenwertproblem: Skript ab S. 90

Wir tauchen nun etwas tiefer ein in die Eigenschaften von lin. Abbildungen. Wir werden die sogenannten Eigenwerte & Eigenvektoren von Matrizen betrachten. Diese Konstrukte werden wir für mehrere Anwendungen benötigen, u.a. zur Diagonalisierung quadratischer Matrizen. Es gibt einen kurzen Exkurs ins Thema der Quadriken für Interessierte, und schlussendlich werden wir die erlernten Werkzeuge dazu benutzen können, Differentialgleichungen zu lösen!

- **Eigenwerte (EW):** Skript S. 90

  Definition, Berechnungsmethode + Beispiele im Skript. Sehr wichtig ist der Begriff der algebraischen Vielfachheit (auch Multiplizität genannt).

- **Eigenvektoren & Eigenraum (EV):** Skript S. 91 ff.

  Definition, Berechnungsmethode + kombinierte Beispiele (mit EW) im Skript.

  Besonders wichtig ist der Begriff der geometrischen Vielfachheit.

- **EW + EV Eigenschaften:** Skript S. 94

Betrachtet im Skript die wichtige Eigenschaft der Ähnlichkeit zweier Matrizen, sowie die Begriffe **einfach** & **halbeinfach**.

- **Diagonalisierbarkeit:** Skript S. 94 ff.

Ein wichtiger und zentraler Begriff künftiger Überlegungen. Definition, Eigenschaften und Rechenbeispiele im Skript.

- **Das Eigenwertproblem symmetrischer Matrizen:** S. 96 - 103

Es gibt einen guten Grund, warum wir symmetrische Matrizen bevorzugen. Betrachtet im Skript die ungemein vorteilhaften Eigenschaften symmetrischer Matrizen im Bezug auf das Eigenwertproblem. Ausserdem findet ihr auf den Folgeseiten viele Rechenbeispiele, welche auch wieder die EW & EV Berechnungen beinhalten.

o Anwendungen des Eigenwertproblemes: Skript ab S. 104

Wir kommen zu den unzähligen Anwendungen. Im Rahmen der Vorlesung behandeln wir grob:

- Berechnung von $\underline{\underline{A}}^k \underline{x}$: Skript S. 104 ff.
- Berechnung von $e^{\underline{\underline{A}}}$: Skript S. 106 ff.
- Matrixnormen : Skript S. 109
- (Die Hauptachsentransformation quadratischer Formen (Quadriken): Skript S. 110 - 116 Die letzten Jahre weggelassen.)
- Berechnung lokaler Extrema: Skript S. 116 ff.

Wobei die Berechnung des Matrixexponentials essentiell zur Lösung von Differentialgleichungen ist. Die Berechnung von $\underline{\underline{A}}^k \underline{x}$ beschäftigt sich mit der Frage nach der Auswirkung einer mehrfachen Anwendung einer Matrix auf einen Vektor (gab schon Prüfungsfragen diesbezüglich). Matrixnormen wurden u.U. bereits behandelt, einige können jedoch erst jetzt verstanden werden. Die Quadriken wurden evtl. kurz angesprochen, dahinter verbirgt sich für Interessierte einiges, es gibt jedoch auch einfach ein Kochrezept und eine Tabelle, welche die wichtigsten Kegelschnitte / Quadriken zusammenfasst. Auch die Berechnung lokaler Extremas wird kurz angesprochen, jedoch sehr selten geprüft.

o Differentialgleichungen: Skript ab S.131

Mit den nun neu erlernten Werkzeugen sind wir in der Lage, lineare DGL beliebiger Ordnung zu lösen. Im Rahmen der Vorlesung interessieren wir uns aber vor allem für DGL 1. und 2. Ordnung. Das Vorgehen ist dabei analog zum bekannten Vorgehen aus der Analysis. Nur interessieren wir uns nunmehr nicht für eine einzige DGL, sondern für ganze DGL-Systeme!

- **Lineare Systeme erster Ordnung:** Skript S. 131-141

  Zuerst betrachten wir DGL erster Ordnung. Die Definition solcher Systeme, die allgemeine Lösung sowie das Anfangswertproblem und dutzende Beispiele finden sich im Skript.

- **Lineare Systeme zweiter Ordnung:** Skript S. 142-149

  Dasselbe trifft auf die Systeme zweiter Ordnung zu. Erfahrungsgemäss werden an Prüfungen eher Systeme erster Ordnung geprüft, aber es gibt Ausnahmen.